ingressi → [SISTEMA] → uscite

↑ ingressi manipolabili

↑ disturbi

CONTROLLI AUTOMATICI: studio di tutti i sistemi in cui è presente una regolazione del sistema attraverso una regolazione automatica

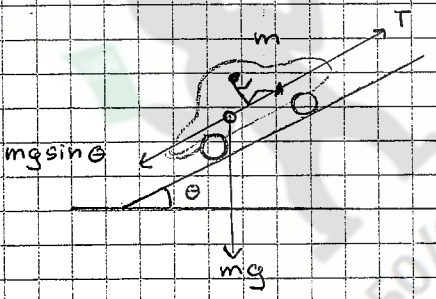
FEED-BACK (retroazione): meccanismo di controllo attraverso il quale controllo l'uscita del sistema

Dobbiamo sviluppare un linguaggio astratto (matematica) per permettere il funzionamento di un sistema.

USCITE → EFFETTI del sistema. Comportamenti che possiamo osservare dall'esterno del sistema.

INGRESSI → CAUSE esterne che possono agire sul sistema. Sono manipolabili in quanto noi abbiamo la possibilità di influenzarli.

I CONTROLLI AUTOMATICI SONO LEGATI A UN CORRISPETTIVO FISICO



$\Sigma F_i = ma = T - mg\sin\theta - \beta v$

attrito: uso il modello coulombiano → proporzionale alla velocità

$\Rightarrow \quad ma = T - mg\sin\theta - \beta v$

T: ingresso manipolabile; θ: disturbo

EQUAZIONE DIFFERENZIALE: relazione tra a e v ($\ddot{x}$ e $\dot{x}$)

EFFETTO: la macchina si muove

USCITE: posizione, velocità

$$m\ddot{x} = T - mg\sin\theta - \beta v$$

Abbiamo bisogno delle condizioni iniziali: quante?

OSS! l'equazione vale in ogni istante di t basta sapere $x(0)$ e $\dot{x}(0)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

STATO DEL SISTEMA: insieme di informazioni necessarie al tempo t_0 per determinare gli ingressi, l'evoluzione futura del sistema.

↓

è determinato da POSIZIONE e VELOCITA'

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{posizione} \\ \rightarrow \text{velocità} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m\dot{x}_2(t) = T - mg\sin\theta - \beta x_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

L'USCITA è funzione degli stati che descrivono il comportamento del sistema.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

$\underline{u}$ è un vettore di ingressi $\in \mathbb{R}^m$

$\underline{f}$: vettore generico di funzioni non lineari $\in \mathbb{R}^n$

$\underline{y}$ = vettore delle uscite $\in \mathbb{R}^p$

$u \rightarrow$ [K] $\rightarrow y = Ku$

AMPLIFICATORE

- SISTEMI PROPRI: l'uscita e la causa sono ISTANTANEI
- SISTEMI STRETTAMENTE PROPRI: l'uscita dipende dagli ingressi → → EFFETTI SUCCESSIVI ALLE CAUSE

Principio di causalità: le cause precedono gli effetti

$$\begin{cases} \cancel{m}\dot{x}_2(t) = \frac{T}{\cancel{m}} - \cancel{mg}\sin\theta - \frac{\beta}{m} \cdot x_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

NOTAZIONE

I = ingresso

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{T}{m} - \frac{\beta}{m} x_2 - g\sin\theta \end{bmatrix}$$

I manipolabile — I non manipolabile

$\underline{f}$

N.B L'ordine non conta: le equazioni di stato non sono univoche: il sistema fisico è uno solo => non univoche ma EQUIVALENTI

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{u} = \begin{bmatrix} T \\ \Theta \end{bmatrix}$$

$y = x_2 \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \underline{u} = \mathbb{R}^2 \qquad y \in \mathbb{R}$

DEF $x^* \in \mathbb{R}^n$ è <u>STATO DI EQUILIBRIO</u> relativamente all'ingresso $u(t)$ (con $t \geq t_0$) se, quando $\underline{x}(t_0) = x^*$ e viene applicato l'ingresso u ALLORA $\underline{x}(t) = x^* \quad \forall t \geq t_0$

OSS! Se non c'è evoluzione nel tempo, conseguenze:
x^* è stato di equilibrio per $u(t)$, $t \geq t_0$ <=>
<=> $f(x^*, u(t)) = \underline{0} \quad \forall t \geq t_0$

L'equilibrio è legato alla stabilità.

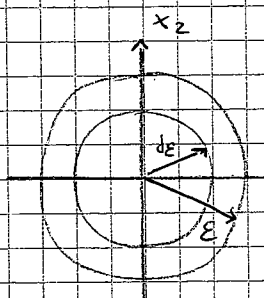
- se $g = g(\underline{x}, u)$ -> sistema proprio
- se $g = g(x)$ -> sistema strettamente proprio
- se $g = f(x)$ -> SISTEMA AUTONOMO (non c'è ingresso)

$$\dot{\underline{x}} = f(x)$$

sia $t_0 = 0$
sia $\underline{x} = \underline{0}$ punto di equilibrio del sistema (3.4)

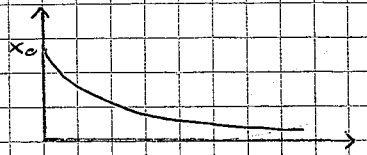
DEF L'origine ($\underline{0}$) è <u>PUNTO DI EQ. STABILE</u> se

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$; se $\|\underline{x}(0)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$



$t = 0 \qquad \dot{x} = -ax \qquad a > 0$

$$\underline{x}(t) = x_0 e^{-at}$$



fisso un $\varepsilon > 0$ e pongo un x_0:

$$x(t) = \pm \frac{\varepsilon}{2} e^{-at} \qquad (e^{-at} \leq 1)$$

$$|x(t)| = \frac{\varepsilon}{2} \left| e^{-at} \right| = \frac{\varepsilon}{2} e^{-at} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$

$\underline{x} = 0$ STATO DI EQUILIBRIO

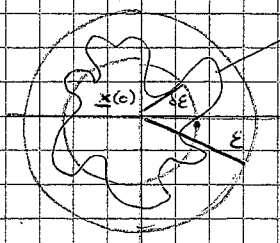
$\underline{0}$ è punto di eq. stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$,

$$\|\underline{x}(0)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

DEF STABILITA' INTERNA: perturbazione dello stato di equilibrio del sistema e a perturbazioni dello stato iniziale.

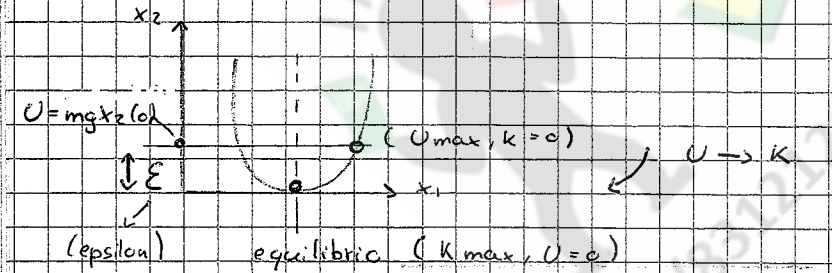
↓

(secondo Lyapunov)



→ perturbazione dell'equilibrio che comunque rimane dentro l'intorno arbitrario centrato nell'origine di raggio ε

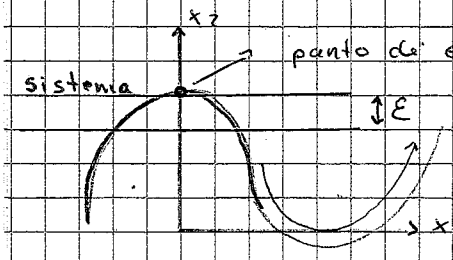
esempio: posizione di una pallina in una tazza



se non voglio superare la quota fissata, prendo qualsiasi frazione di epsilon dalla quale far partire la pallina, la quale resterà sempre entro quella quota.

↓

PUNTO DI EQ. STABILE



→ non riesco a trovare un delta, seppur molto piccolo nel quale la pallina si sposti e resti entro epsilon

↓

se esco e rientro dal sistema allora non è più un sistema stabile

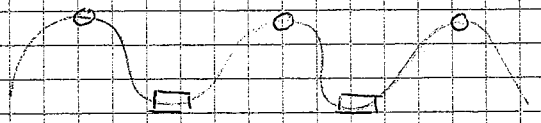
N.B la definizione fino a qui data di equilibrio stabile non considera il caso dell'attrito.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Vediamo ora la definizione che tiene in considerazione l'attrito.

DEF 0 (origine) è PUNTO DI EQ. ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile e inoltre il $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Un sistema può avere più punti di equilibrio, alcuni stabili e altri no.



○ = pnt di eq. instabile

□ = pnt di eq stabile

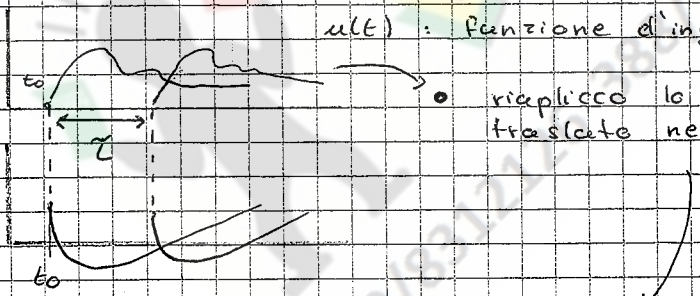
SISTEMA DINAMICO STRETTAMENTE PROPRIO (generico)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,t) \end{cases} \rightarrow g \text{ non dipende dall'ingresso}$$

$t \geq c$

$K = K_0 e^{K_1 t}$

Un sistema dinamico si dice tempo-invariante (o stazionario) se detta $x^*(t)$, $t \geq t_0$, l'evoluzione dello stato a partire dal tempo t_0 in corrispondenza di condizioni iniziali $x^*(t_0)$ e con ingresso $u^*(t)$, $t \geq t_0$; ALLORA $\forall \tau (t_0 + \tau) \in \mathbb{R}$ l'evoluzione del sistema a partire dall'istante $(t_0 + \tau)$ con condizioni iniziali $x(t_0 + \tau) = x^*(t_0)$, e ingresso $u(t) = u^*(t_0 + \tau)$ è: $x(t) = x^*(t + \tau)$



N.B. Però devo ripristinare anche le stesse condizioni iniziali

quando $\tau = 0 \rightarrow u(t) = u^*(t_0)$

Cioè il sistema è stazionario quando scelto t_0 e l'ingresso, nell'evoluzione del sistema τ è una traslazione nel tempo $\Rightarrow$ OTTENGO LA STESSA CONDIZIONE DEL SISTEMA

(Un sistema dinamico strettamente proprio e stazionario ha equazioni dinamiche dove la t non compare)

N.B

MASTER COPY
Tel. 050 8372126
Cell. 388 9837745